

Sein oder Nichtsein als Grundfrage der Quantenphysik

Fritz Bopp

Z. Naturforsch. **39a**, 113–131 (1984); eingegangen am 15. Juli 1983

To be or not to be as basic question in quantum physics

The question is often asked how to interpret quantum physics. That question does not arise in classical physics, since Newton's axioms are immediately connected with basic ideas and experiences. The same is possible in quantum physics, if we remember how elementary particle physicists describe their experiments.

As Helmholtz has pointed out, the basic assumption of classical physics is that of generality. That means: Bodies remain the same during their motion. Obviously, that is no longer true in quantum physics. Particles can be created and annihilated. Therefore creation and annihilation must be considered as basic processes. Motion only occurs, if a particle is annihilated in a certain point, if an equal one is created in an infinitesimally neighbouring point, and if this process is continuously going on during a certain time. Motions of that kind are compatible with the existence of some manifest creation and annihilation processes.

If we accept this idea, quantum physics can be derived from first principles. As in classical physics, we know therefore what happens from the very beginning. Thus questions of interpretation become dispensable.

A particular mathematical method is used to exhaust continua. The theory is formulated in a finite lattice, whose point density and extension equally go to infinity. All calculations are therefore performed in a finite dimensional Hilbert space. The results are however related to an infinite dimensional one. Earlier calculations may, therefore, be essentially correct, though they must be rejected in theories which are based on manifestly infinite dimensional Hilbert spaces. Here limiting processes do not occur in the state space. They are only admissible for numerical results.

§ 1. Die Basisvorstellung

Wenn ein Ball zwischen zwei Partnern hin und her gespielt wird, zweifelt niemand daran, daß es stets der nämliche Ball ist. Nimmt man an, daß alle Körper bei der Bewegung ihre Identität bewahren, so ist das mit der Basisvorstellung der klassischen Physik im Einklang. Sie erscheint als so selbstverständlich, daß man sie oft gar nicht als Voraussetzung formuliert. Helmholtz [1] hat sie die Gen-Identität genannt.

Bei Elementarteilchen besteht Anlaß, daran zu zweifeln. Seit den frühen Dreißigerjahren weiß man [2], daß ein genügend energiereiches Lichtquant beim Zusammenstoß mit einem Atomkern verschwinden kann, und daß zur Kompensation ein positives und ein negatives Elektron, ein Elektron-Positronpaar oder, wie man auch kurz sagt, ein Elektronenpaar auftritt. Bei nicht allzu großer Energie bleibt der Atomkern unverändert. Er wird nur ein wenig angestoßen und übernimmt dabei einen kleinen Impuls. Darum ist es klar, daß das Elektronenpaar aus dem Lichtquant entsteht.

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. F. Bopp, Sulzbacherstr. 3, D-8000 München 40.

Nach den Vorstellungen der klassischen Atomphysik könnte man daraus schließen, das Lichtquant sei ein gebundenes Elektronenpaar. Solche Paare gibt es tatsächlich. Ein Elektron kann ähnlich wie an einen Atomkern auch an ein Positron gebunden sein. Es entsteht das sogenannte Positronium, das man beobachten kann, und das von Lichtquanten verschieden ist. Lichtquanten müßten, wären sie Elektronenpaare, viel stärkere Bindungsenergien haben. Es gibt zahlreiche Gründe dafür, daß das nicht möglich ist.

Ein empirischer Grund, der zum Kern des Problems führt, ist die Paarvernichtung. Trifft ein Elektron auf ein Positron, so können beide verschwinden. Dabei entstehen jedoch zwei Lichtquanten. Man hätte also, trafe obige Vorstellung zu, zwei gebundene Elektronenpaare im Widerspruch zur Gen-Identität. Das wäre ein Widerspruch.

Darum hat sich von Anfang an eingebürgert zu sagen, das Lichtquant werde beim Kernstoß vernichtet, und ein Elektronenpaar werde erzeugt. Damit ist die Basisvoraussetzung der Gen-Identität verletzt. M. v. Laue hat darum gesprächsweise betont, die Entdeckung der Paarerzeugung sei die bedeutendste der Dreißigerjahre.

0340-4811 / 84 / 0200-0113 \$ 01.3 0/0. – Please order a reprint rather than making your own copy.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Einseitig ist die Abweichung von der klassischen Physik nicht sonderlich überraschend. Denn der Vorgang ist ohne Zweifel ein quantenphysikalischer und als solcher nicht auf die klassische Physik zurückführbar. Andererseits ist es aber doch von Bedeutung, daß sich durch solche Experimente bereits die Basisvoraussetzung der klassischen Physik als unhaltbar erweist. Es ist darum zu erwarten, daß man schon von der neuen Voraussetzung her und nicht erst mittels des Prozesses der Quantisierung auf dem Umweg über die klassische Physik zur Quantenphysik gelangen kann [3]. Das soll hier versucht werden.

Die Preisgabe der Gen-Identität schafft zunächst Komplikationen. Erstens hört die Materie auf, Garant der Beständigkeit der Welt zu sein. Damit verliert sie ihre fundamentale Bedeutung für die Philosophie. Zweitens muß man die Vorstellung aufgeben, die wir mit den frühesten Vertretern der griechischen Philosophie teilen, alles Geschehen lasse sich allein auf Bewegungen zurückführen. Entstehen und Vergehen kommen wieder ins Spiel.

Der erste Verzicht ist harmlos. Bereits in der klassischen Physik haben Erhaltungssätze für die Beständigkeit der Welt gesorgt, unter denen der für die Materie mehr und mehr an Bedeutung verloren hat. Nicht die Erhaltung der Materie, sondern die Naturgesetze sind dafür verantwortlich, daß die Welt bei allem Wechsel des Geschehens beständig ist.

Der zweite Verzicht ist für den Übergang von der klassischen Physik zur Quantenphysik wesentlich. Man kann der damit verbundenen Komplikation dadurch entgehen, daß man Bewegung nicht mehr als fundamental betrachtet und sagt: Alles Geschehen ist ein Zusammenspiel von elementaren Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen. Bewegung kommt allein dadurch zustande, daß ein Teilchen in einem bestimmten Punkt vergeht, daß zur Kompen-sation ein gleichartiges in einem infinitesimal benachbarten Punkt entsteht, und daß sich dieser Prozeß eine Weile stetig fortsetzt. Auch damit hat man Bewegung im Griff, nur aber so, daß eigentliche Teilchenerzeugungen und -vernichtungen möglich sind. Wiederum bestimmen Gesetze den Ablauf des Geschehens.

Teilchen können entstehen und vergehen. Das ist keine Hypothese, sondern ein empirisch gesichertes Faktum. Der Satz ist nicht nur auf Elektronen und Positronen anwendbar. Er gilt auch für Lichtquan-

ten und hätte dafür gleich nach Entdeckung der Quantennatur des Lichtes ausgesprochen werden können. Inzwischen hat es sich gezeigt, daß man bei hinreichender Energie alle Teilchen erzeugen kann, stabile und auch instabile, also auch solche, die nach kurzer Zeit ähnlich wie radioaktive Teilchen zerfallen. Insbesondere können Protonen und Neutronen entstehen und vergehen, also gerade diejenigen, aus denen die makrophysikalische Materie hauptsächlich besteht.

Es kann nicht mehr bezweifelt werden, daß Entstehen und Vergehen fundamentale Prozesse sind. Eine Physik auf dieser Basis muß von der klassischen Physik verschieden sein. Dennoch wird es Physik sein. Der Aufbau der Theorie erfolgt nach denselben Prinzipien wie die klassische Physik, denjenigen wissenschaftstheoretischen Prinzipien nämlich, die Newton [4] in seinen scholia zwar nur sehr knapp, aber mit großer Klarheit formuliert hat. Nach ihm liegen einer Theorie evidente Axiome zugrunde. Diese ergeben sich aus empirisch gesicherten Aussagen nach ihrer Erweiterung durch Induktion, durch die sie zu einer tragfähigen Grundlage für logische Deduktionen werden.

Mathematiker und Physiker bestreiten heute die Existenz evidenter Axiome mit Argumenten, die niemand bezweifeln kann, dennoch zu unrecht. Ihre Argumente richten sich nämlich nicht gegen die Evidenz, sondern gegen unzulässige Erwartungen, die manche mit ihr verbinden.

Es ist klar, daß man sich in Beweisen nicht auf Evidenzen stützen kann. Grundlage aller Beweise sind allein die Axiome. Doch lassen sich diese nicht mehr logisch beweisen, nach dem Gödelschen Satz [5] nicht einmal ihre Widerspruchsfreiheit. Denn auch die fortschreitende Vertiefung durch Übergang zu immer neuen Ebenen der Metamatematik führt nicht weiter. Es bleibt nur die Feststellung, die Wahrheit wohne im Abgrund. Eine rein deduktive Mathematik ist also ein nicht abgeschlossenes System. Geht es um mehr als um willkürliche oder durch Konventionen geheiligte Spielregeln, so bedürfen Axiome einer anderen Begründung.

Es ist auch richtig, daß die Evidenz der Axiome deren unbegrenzte Gültigkeit nicht garantiert. Dafür gibt es zahlreiche Beispiele. Wäre es anders, so brauchten wir die Voraussetzung der Gen-Identität nicht zu verlassen. Gültigkeitsgrenzen der Axiome röhren daher, daß die für Deduktionen nötige Annahme der Allgemeingültigkeit empirisch gesicher-

ter Sätze nicht unbegrenzt zu gelten braucht. Denn sie stellt eine Überschreitung der Grenzen des unmittelbar Erfahrbaren dar. Auch eine rein empirisch begründete Wissenschaft ist ein offenes System. Jeder wirkliche Fortschritt der Wissenschaft erfordert eine Überschreitung von Gültigkeitsgrenzen.

Empirisch begründete Axiome, wie sie Newton fordert, sind jedoch mehr als willkürliche Spielregeln. Innerhalb ihres Geltungsbereiches sind sie widerspruchsfrei. Beschreibt man nämlich nur, was man tun kann, so kann man das tun, noch ehe man begrifflich erfaßt, was es bedeutet, noch ehe also Logik zu greifen vermag. Selbst wenn wir zu neuen Axiomen übergehen müssen, bewahren empirisch gesicherte Sätze ihre Bedeutung innerhalb von Grenzen, die stets vorhanden sind, die aber erst bei diesem Übergang erkennbar werden.

Gerade die Unerschütterlichkeit von Erfahrungen garantiert den heute so oft verteuften Fortschritt der Erkenntnis. Denn neue Theorien müssen nicht nur neue Erfahrungen umschließen. Sie müssen auch mit den alten im Einklang bleiben. Darum haben sie einen weiteren Geltungsbereich. In der Erweiterung dieses Bereiches zeigt sich der Fortschritt. Wahrhaft progressive Wissenschaft muß zugleich extrem konservativ sein.

Erst das Zusammenspiel von Erfahrung und Logik führt zur Erkenntnis. Völlig absurde Theorien können logisch einwandfrei formuliert sein. Oft knüpft man hübsch Knopf für Knopf seiner Weste und merkt erst am Ende, daß man falsch angefangen hat.

Die Bedeutung der Logik für die Erkenntnis wird dadurch nicht geschmälert. Sie besteht darin, daß wenige Basiserfahrungen ausreichen, um allein mittels logischen Schließens weite Teile der Weltordnung zu begreifen. Außerdem erlaubt die Verlässlichkeit des Schließens bei mangelnder Übereinstimmung von Folgerungen und Erfahrungen, Mängel der Axiome aufzudecken.

Die Bedeutung der Erfahrung beruht auf einem Glauben, und zwar auf einem Glauben, der sich mit fortschreitender Erkenntnis festigt. Er besteht darin, die Welt als dem Menschen gegeben zu betrachten, der die ihr innewohnende Ordnung um des Lebens willen zu erkennen bemüht sein muß. Ohne diesen Glauben wäre alles Erkenntnisstreben gegenstandslos. Denn Erkenntnis ist nur möglich, wenn es etwas zu erkennen gibt. Der Glaube ist also Voraussetzung aller Erkenntnis.

Nicht „...ismen“ sind es, welche die Wende zur Neuzeit charakterisieren, sondern die Einsicht, daß Erfahrung und Logik zusammengehören. In einem Prozeß, der in der Spätscholastik begonnen und bei Newton seinen Abschluß gefunden hat, ist die Überbewertung der Logik überwunden und die Philosophie auf eine höhere Ebene gehoben worden, auf eine nicht ganz neue Ebene, wie die Verwandtschaft der naturwissenschaftlichen Philosophie mit der von Platon [6] zeigt, – auf eine, von der man leicht abstürzen kann. Säkularisierte Scholastik ist nicht besser als eine theologisch geprägte.

Bei der Formulierung einer Physik ohne Gen-Identität, in der das Entstehen und Vergehen als nicht weiter hinterfragbare Grundprozesse anerkannt werden, wollen wir uns von Newtons „Experimentalphilosophie“ leiten lassen. Die Induktion besteht darin, daß die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen als allgemeines Phänomen anerkannt wird, und daß Vorgänge, die in einem Punkte stattfinden, andere in Nachbarpunkten hervorrufen können.

Angesichts derer, die weit über die Grenzen der Physik hinaus von den Interpretationsversuchen der Quantenphysik ausgehen, scheint es mir nicht ganz überflüssig zu sein, sich auf Newtons Programm der „Mathematisierung der Naturphilosophie“ (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) zu besinnen.

§ 2. Elementarprozesse

In der klassischen Physik betrachtet man wie schon in der griechischen Naturphilosophie ein Ding und verfolgt seine Bewegung im Raum. Dem hat Heraklit [7] eine andere Betrachtungsweise entgegengesetzt. Er beobachtet ein Gebiet im Raum und fragt, was sich im Laufe der Zeit ändert.

Beispielsweise bewahrt eine ruhig brennende Flamme ihre Gestalt, nicht weil die Beständigkeit der Materie dafür sorgt, sondern weil ihre Existenz durch einen gleichmäßigen Zufluß von Brennstoff und Luft, und durch einen gleichmäßigen Abfluß der Verbrennungsprodukte gesichert wird, also durch das Gesetz, welches den Vorgang beherrscht. Es gibt eine Fülle von Vorgängen vergleichbarer Art. Auch die des Lebens gehören dazu. Man kann einen Menschen nach wenigen Jahren wiedererkennen, obwohl kaum noch eines der Atome in seinem Körper ist, die ihn bei der ersten Begegnung aufgebaut haben.

In solchen Fällen spricht man heute von Fließgleichgewichten. Sie lassen sich alle naiv atomistisch verstehen, so daß sie mit der Annahme der Gen-Identität verträglich sind. Doch bleibt die Erkenntnis, daß man ohne diese Voraussetzung auskommen kann, wenn Gesetze für die Beständigkeit sorgen. Ist Heraklits Idee im Bereich seiner Beispiele auch belanglos, so hat er damit doch den Weg vorbereitet, auf dem wir nun weiterkommen können.

Statt eines Gebietes fassen wir einen Raumpunkt ins Auge und fragen nach Vorgängen in diesem. Der Punkt kann leer sein, oder es kann sich ein Teilchen in ihm befinden. Den Besetzungszustand bezeichnen wir mit $v = 0$ oder 1 , worin $v = 0$ auf den leeren und $v = 1$ auf den besetzten Zustand bezogen sein soll. Gibt es Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse, so wird sich v im Laufe der Zeit t ändern, und $v = v(t)$ wird eine Funktion der Zeit sein, die zwischen den Werten 0 und 1 hin und her springt.

Eine solche Funktion ist grundsätzlich unbeobachtbar, weil wir den Raumpunkt nicht ständig ins Auge fassen können, und weil man eine unstetige Funktion nicht durch Interpolationen vervollständigen kann, wie dicht auch die Beobachtungen aufeinander folgen mögen. Eine unstetige Funktion kann man nicht durch Messungen bestimmen. Leibniz [8] hat daraus geschlossen, die Natur mache keine Sprünge.

Diese Folgerung ist seit langem nicht mehr haltbar. Wenn es bei unstetigen Funktionen Gesetze gibt, so müssen es statistische sein. Man denke z.B. daran, daß bei einem guten Würfel jede Augenzahl gleichwahrscheinlich ist.

Darum können wir sagen: Wenn es für Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse Gesetze gibt, so müssen es statistische sein [22]. Es müssen Wahrscheinlichkeiten w_0 und w_1 für beide Zustände existieren, die sich nach einem näher zu bestimmenden Gesetz $w_v = w_v(t)$ mit der Zeit ändern. Sind diese Funktionen stetig, machen sie also keine Sprünge, so kann man sie im Sinne von Leibniz empirisch bestimmen, klarerweise nur so, wie man durch Beobachtung vieler gleichartiger Vorgänge zu Wahrscheinlichkeiten zu gelangen pflegt. Wenn es Gesetze für Elementarprozesse gibt, so müssen es statistische sein. Es gibt aber (anders als etwa beim Würfelspiel) keine ersichtlichen empirischen Gründe dafür, daß man sie aus deterministischen Gesetzen ableiten kann.

Gleichungen zur Bestimmung von $w_v(t)$ heißen stochastische. Stochastische Gleichungen [9], die sich aus deterministischen Theorien ableiten lassen, haben einen sehr speziellen Charakter. Sie liefern rein abklingende Wahrscheinlichkeiten oder gedämpfte Schwingungen. Die Planck-Kolmogoroff-Gleichung liefert ein typisches Beispiel. Wir haben hier keinen Grund, solche Gleichungen zu erwarten oder gar zu fordern. Wir müssen vielmehr unabhängig von solchen Vorbildern nach stochastischen Gleichungen suchen.

Dennoch gibt es eine Anzahl von Bedingungen, die allein aus dem statistischen Charakter der Gleichung folgen. Da der betrachtete Punkt mit Sicherheit leer oder besetzt ist, muß $w_0 + w_1 = 1$ sein. Darum können wir w_v durch

$$w_0 = \frac{1}{2}(1 - w), \quad w_1 = \frac{1}{2}(1 + w) \quad (2.1)$$

darstellen. Es gibt nur eine unbekannte Funktion, nämlich die Wahrscheinlichkeitsspanne $w_1 - w_0 = w(t)$. Danach beschreibt $w = +1$ den besetzten Zustand und $w = -1$ den leeren; $w = 0$ liefert $w_0 = w_1 = 1/2$ und soll den Zustand völliger Unkenntnis bezeichnen. Eine andere Kennzeichnung dieses Zustands wäre mathematisch möglich, ist aber wegen gekünstelter Unsymmetrien unzweckmäßig. Da Wahrscheinlichkeiten nicht negativ sein können, gilt

$$-1 \leq w(t) \leq +1. \quad (2.2)$$

Die empirische Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten setzt die Beobachtung vieler gleichartiger Systeme voraus. Wahrscheinlichkeiten beziehen sich also nicht auf einzelne Systeme, sondern auf eine Gesamtheit gleichartiger Systeme. Man spricht von einer Gibbschen oder virtuellen Gesamtheit [10]. Damit meint man, daß es sich nicht um ein großes System handelt, welches aus vielen gleichartigen Systemen zusammengesetzt ist, sondern um eine gedankliche Zusammenschau des Geschehens in vielen physikalisch vollständig unabhängigen Einzelsystemen [11]. Darum besteht zwischen diesen keine Wechselwirkung, woraus sich ergibt, daß die Gleichungen für $w_v(t)$ linear homogen sein müssen, linear, weil es eine Gibbsche Gesamtheit ist, und homogen, weil die Gleichungen nicht nur für relative, sondern auch für absolute Häufigkeiten gelten müssen. Seien w'_v und w''_v zwei Lösungssysteme und N', N'' die zugehörigen Anzahlen der Beobachtun-

gen, so ist auch

$$\begin{aligned} w_v &= g' w'_v + g'' w''_v, \quad g' = N'/N, \\ g'' &= N''/N, \quad N = N' + N'', \end{aligned}$$

eine Gibbsche Gesamtheit, die den nämlichen Gleichungen genügt und damit eine mögliche Lösung ist.

Die stochastische Gleichung für w ist immer noch linear, weil die Gln. (2.1) die Linearität nicht stören. Doch braucht sie nicht mehr homogen zu sein, weil $w_0 + w_1 = 1$ nicht mehr erlaubt, von den relativen Häufigkeiten zu den absoluten zurückzukehren. Man wird also im allgemeinen eine lineare, aber inhomogene Gleichung von der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \frac{d^n w}{dt^n} = f(t), \quad \frac{d^0 w}{dt^0} \equiv w$$

erwarten. Fordert man jedoch, daß sich der Zustand vollständiger Unkenntnis nicht durch Abwarten in Kenntnis verwandeln kann, so muß $w = 0$ eine Lösung sein. Darum ist schließlich auch die Gleichung für w linear homogen. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d^n w}{dt^n} = 0. \quad (2.3)$$

Die Koeffizienten c_n sind konstant. Das ist nicht mehr rein statistisch begründbar. Wären sie Funktionen der Zeit, so würden sie irgendwelche von außen kommende Einflüsse beschreiben. Solche wird es am Ende auch geben. Doch müssen sie nach der Basisvorstellung durch die zeitlichen Veränderungen der Wahrscheinlichkeiten in Nachbarpunkten und nicht durch zeitabhängige Koeffizienten bestimmt sein. Darum fordern wir

$$c_n = \text{const.} \quad (2.4)$$

Beliebter Argumentation folgend könnte man sagen, die Konstanz ergebe sich aus der Homogenität der Zeit. Ich bin jedoch davon abgekommen, weil es nach der Basisvorstellung eher einleuchtet zu sagen, es bestehe kein Anlaß in Zeitabhängigen mehr zu sehen als bereits vorhandene Umwelteinflüsse. Im Hinblick auf die These, daß es die Physik ist, die sich ihre Raum-Zeit schafft, ist es willkommen, daß die Homogenität der Zeit aus der obigen Feststellung folgt.

Bei konstanten Koeffizienten beherrscht man die Lösungen von (2.3) vollständig. Es sind Linearkom-

binationen der Eigenlösungen

$$w = e^{\lambda t}, \quad \sum_{v=0}^{\infty} c_v \lambda^v \equiv F(\lambda) = 0. \quad (2.5)$$

Jede Nullstelle der Funktion $F(\lambda)$ liefert eine mögliche Eigenlösung. Aus statistischen Gründen dürfen keine Mehrfachwurzeln vorkommen. Denn diese führen zu Lösungen von der Form $t^n e^{\lambda t}$, die im Falle $n \geq 1$ mit (2.2) nicht verträglich sind. Da w reell ist, muß mit λ auch λ^* vorkommen, ebenfalls rein statistisch, wiederum wegen (2.2) muß

$$\operatorname{Re} \lambda \leq 0 \quad (2.6)$$

sein.

In der statistischen Mechanik sind die Realteile von λ im allgemeinen negativ. Sie sind für die Vermehrung der Entropie verantwortlich und Ausdruck für das kollektive Verhalten real wechselwirkender Systeme. In Grundprozessen würden negative Realteile bedeuten, daß es absterbende Zustände gibt. Das kann man vielleicht für kosmische Zeiten nicht von vorneherein ausschließen [12]. Doch ist es kaum zweckmäßig, kosmologische Hypothesen zu machen, solange Einflüsse des Kosmos keine Rolle spielen. Darum fordern wir (2.6) verschärfend

$$\operatorname{Re} \lambda = 0. \quad (2.7)$$

Das ist wie (2.4) eine physikalische Annahme. Sie ist im Einklang mit Newtons Forderung, keine Möglichkeiten zuzulassen, in denen sich nicht unmittelbar Erfahrung wiederspiegelt, weil man sonst willkürlicher Spekulation das Tor öffnet. „Nihil frustra“ hat Weyl in ähnlichen Fällen gesagt.

Auch die weiteren Annahmen sind physikalischer Natur. Die Zahl der Punkte im Raum ist unendlich viel größer als die Zahl der Teilchen. Darum kann ein leerer Punkt ständig leer bleiben, so daß $w = -1$ eine mögliche Lösung und

$$\lambda = 0 \text{ eine mögliche Wurzel} \quad (2.8)$$

von $F(\lambda) = 0$ sein muß.

Alle anderen Wurzeln treten gemäß $\lambda = \pm i \Omega$ paarweise auf. Gibt es mehrere Wurzelpaare, so entspricht das dem Spektrum gekoppelter Oszillatoren. Das kann man gewiß auch hier nicht ausschließen. Es wird tatsächlich vorkommen. Doch werden wir dann nicht mehr von elementaren, sondern von gekoppelten Prozessen sprechen. Darum fordern

wir, bei Elementarprozessen soll es

$$\text{nur ein Paar von Wurzeln } \lambda = \pm i\Omega \neq 0 \quad (2.9)$$

geben. Das ist nur eine Präzisierung des Begriffs ‚Elementarprozeß‘.

Damit lautet die stochastische Gleichung für Elementarprozesse

$$\frac{d^3 w}{dt^3} + \Omega^2 \frac{dw}{dt} = 0. \quad (2.10)$$

Nach den Ungleichungen in (2.2) sind sicher nicht alle Lösungen dieser Gleichung zulässig. Es besteht also noch die Aufgabe, die Mannigfaltigkeit der physikalisch zulässigen Lösungen abzugrenzen.

Zur physikalischen Analyse von Basisgleichungen ist es zweckmäßig, Differentialgleichungen höherer Ordnung durch Systeme von Gleichungen erster Ordnung zu ersetzen, (2.10) also z. B. durch

$$\dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p}, \quad \Omega = |\boldsymbol{\Omega}|, \quad \boldsymbol{\Omega} = \text{const.} \quad (2.11)$$

$$p_3 = w, \quad p_1 + i p_2 = \frac{\Omega_1 + i \Omega_2}{\Omega_3} \left(w + \frac{i \Omega_3 \dot{w} + \ddot{w}}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \right).$$

In einer Differentialgleichung dritter Ordnung ist der Zustand in einem Augenblick durch w, \dot{w}, \ddot{w} oder nach (2.11) durch den Vektor \mathbf{p} bestimmt. Dieser Vektor umfährt nach (2.11) den Vektor $\boldsymbol{\Omega}$ auf einem Kreiskegel. Seiner statistischen Bedeutung wegen ist er auf unsere Information bezogen.

Der konstante Vektor $\boldsymbol{\Omega}$ ist von unserer Information unabhängig und damit von \mathbf{p} , was der Linearität von (2.11) entspricht. Er beschreibt somit objektiv die Änderungen des Vektors \mathbf{p} und der Information im Laufe der Zeit. Er ist also Repräsentant des objektiven Geschehens. Doch kennt man nach (2.10) unmittelbar nur den Betrag von $\boldsymbol{\Omega}$. Wir werden sehen, daß der Winkel ϑ von $\boldsymbol{\Omega}$ gegen die 3-Achse beobachtbar ist. Der Azimutwinkel φ von $\boldsymbol{\Omega}$ um die 3-Achse bleibt jedoch unbestimmt. Letzteres folgt daraus, daß nach Voraussetzung nur $w = p_3 = p \cos \vartheta$ beobachtbar ist, wenn man $\mathbf{p} = p(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ setzt. Da p_3 nicht von φ abhängt, liefert w keine Aussage über φ . Man kann also den Anfangswert des Azimuts beliebig wählen. Mit der Zeit ändert er sich gemäß der Bewegung von \mathbf{p} auf dem Kreiskegel um $\boldsymbol{\Omega}$.

Nach der Ungleichung (2.2) muß der Vektor \mathbf{p} in der Schicht $p_3 \leq 1$ liegen. Ist dabei $|\mathbf{p}| = p > 1$, so kann es vorkommen, daß der Vektor \mathbf{p} im Laufe der Zeit über die Grenzen der Schicht hinauswan-

dert. Dem könnte man damit begegnen, daß man nur solche $\boldsymbol{\Omega}$ zuläßt, die zu hinreichend schmalen Kreiskegeln führen. Doch werden dann die Vektoren $\boldsymbol{\Omega}$ \mathbf{p} -abhängig. Das Gesamtsystem wäre nicht mehr linear in \mathbf{p} , und $\boldsymbol{\Omega}$ verlöre seine von der Information \mathbf{p} unabhängige objektive Bedeutung. Darum darf \mathbf{p} nicht aus der Einheitskugel herausragen. Es muß

$$\mathbf{p}^2 \leq 1 \quad (2.12)$$

sein.

Damit definiert die Einheitskugel (und nicht etwa die planparallele Schicht) den stochastischen Konvexkörper. Liegen die Vektoren \mathbf{p}' und \mathbf{p}'' innerhalb der Einheitskugel, so gilt das auch für alle Vektoren

$$\mathbf{p} = g' \mathbf{p}' + g'' \mathbf{p}'', \quad g' + g'' = 1, \quad g', g'' \geq 0, \quad (2.13)$$

also für alle, die bis zu der Strecke zwischen den Enden von \mathbf{p}' und \mathbf{p}'' reichen, und die Mischungen der durch \mathbf{p}' und \mathbf{p}'' definierten Gesamtheiten liefern.

Alle Vektoren \mathbf{p} , die gemäß

$$\mathbf{p}^2 < 1 \quad (2.14)$$

innerhalb der Kugel liegen, definieren Gesamtheiten, die durch Mischung aus anderen entstehen können. Denn man kann durch den Endpunkt P von \mathbf{p} Sehnen legen, auf denen es Punktpaare P', P'' gibt, die den Punkt P einschließen, und die Vektoren $\mathbf{p}', \mathbf{p}''$ liefern, welche nach (2.13) mit \mathbf{p} verbunden sind. Hiernach definiert (2.14) „gemischte“ Gesamtheiten.

Die äußersten Grenzen der Punkte P' und P'' werden durch die Schnittpunkte der Sehnen mit der Kugeloberfläche

$$\mathbf{p}^2 = 1 \quad (2.15)$$

definiert. Sie liefern „reine“ Gesamtheiten. Man kann also jeden Vektor vom Typus (2.14) durch Mischung reiner Gesamtheiten erzeugen. Es genügt darum, reine Gesamtheiten zu betrachten. Diese genügen klarerweise nicht mehr dem Superpositionsprinzip, weil durch Superposition reiner Gesamtheiten gemischte entstehen. Der Name röhrt daher, daß man umgekehrt reine Gesamtheiten nicht durch Mischung erzeugen kann. Wenn nämlich (2.15) gilt, liegen die Punkte der Sehnen durch den Endpunkt von \mathbf{p} stets auf einer Seite desselben.

Nach (2.15) ist $\mathbf{p}^2 = p^2 = \text{const.}$ Die Vektoren $\mathbf{p}(t)$, die im Laufe der Zeit aus $\mathbf{p}(0)$ hervorgehen, enden also auf der Schnittlinie des Kegels mit der Kugelfläche vom Radius p . Darum gibt es maximale und minimale Werte von w , $w_{\max} = p \cos \vartheta_1$ und $w_{\min} =$

$p \cos \vartheta_2$. Somit ist der Winkel ϑ von Ω gegen die 3-Richtung durch

$$\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \quad (2.16)$$

bestimmt, wenn wir p kennen, z.B. wenn wir wissen, daß eine reine Gesamtheit vorliegt, für die $p=1$ ist.

Spezielle reine Gesamtheiten, sind unmittelbar erkennbar. Eine solche liegt sicher vor, wenn der Schnittkreis durch den Pol $\mathbf{p} = (0, 0, +1)$ oder durch den Gegenpol $\mathbf{p} = (0, 0, -1)$ geht, wenn also entweder $w_{\max} = +1$ oder $w_{\min} = -1$ ist. Es wird sich zeigen, daß man von den obigen, unmittelbar als rein erkennbaren Gesamtheiten mittels geeigneter Geräte zu beliebigen reinen Gesamtheiten übergehen kann.

Wir haben versucht, Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse in einem Punkt mathematisch zu formulieren. Die Gibbschen Gesamtheiten werden durch den Vektor \mathbf{p} dargestellt. Er befriedigt die Zustandsgleichungen (2.11), in denen Ω das physikalische Geschehen objektiv, also unabhängig vom Stand der Informationen beschreibt. Es wird sich zeigen, daß (2.11) mit der v. Neumannschen Gleichung der Quantenmechanik für Systeme mit zwei Quantenzuständen äquivalent ist. Für die reinen Gesamtheiten erhält man daraus auf bekannte Weise die zugehörige Schrödinger-Gleichung.

Dem Brauche folgend haben wir von Erzeugung und Vernichtung gesprochen, von besetzten und leeren Plätzen: Sein oder Nichtsein, das ist hier die Frage. –

Zwar hat Parmenides [13] einst gesagt: Nichtsein kann nicht sein. Er hat damit u.a. begründet, daß es keinen leeren Raum gebe. Dem hat Demokrit entgegengehalten, der leere Raum existiere als Bewegungsspielraum der Atome. Zum ersten Male wird dabei de facto (wie später klarer im Platonschen Höhlengleichnis) das Gesetz als Ausdruck des Realen betrachtet, hier speziell das durch die Ordnungsstruktur der Geometrie gegebene Gesetz.

Ähnlich ist es hier. Sein und Nichtsein erscheinen als Pol und Gegenpol der stochastischen Kugel $\mathbf{p}^2=1$, sind also völlig gleichberechtigt. Danach ist auch das Nichtsein eine Seinsweise. Sein und Nichtsein sind zwei Seiten einer Alternative. Man könnte von rot und blau oder von andern Bildern sprechen. Im Hinblick auf das experimentell gesicherte Entstehen und Vergehen von Teilchen ist jedoch die Alternative Sein und Nichtsein angemessen.

§ 3. J. v. Neumann- und Schrödinger-Gleichung für Elementarprozesse

Hier soll die Äquivalenz der stochastischen Zustandsgleichungen für reine und gemischte Gesamtheiten mit den entsprechenden Gleichungen der Quantenphysik gezeigt werden. Dabei kommen keine neuen Prinzipien ins Spiel. Wenigstens grundsätzlich wird klar, wie man experimentell spezielle reine Gesamtheiten in beliebige überführen kann. Am Ende wird die Darstellung durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eingeführt.

Die stochastischen Gleichungen in (2.11) kann man in Matrixform schreiben. Schreibt man nämlich den Vektor \mathbf{p} als einspaltige Matrix, so erhält man

$$i \dot{\mathbf{p}} = -(\Omega \cdot \mathbf{J}) \mathbf{p} \quad (3.1)$$

mit

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

worin die Basismatrizen \mathbf{J} den Vertauschungsrelationen

$$[J_i, J_k] = i J_l, \quad (i, k, l) = \text{zykl. } (1, 2, 3), \quad (3.3)$$

der Drehgruppe genügen [14].

Dieser Gleichung sieht man sofort an, daß die Willkür beim Übergang von der Differentialgleichung dritter Ordnung in (2.10) zum System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung in (2.11) unwesentlich ist. Man erhält die anderen Darstellungen durch lineare Transformationen

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = A \mathbf{p},$$

so daß (3.1) in

$$i \dot{\mathbf{p}}' = -(\Omega \cdot \mathbf{J}') \mathbf{p}', \quad \mathbf{J}' = A \mathbf{J} A^{-1},$$

übergeht, worin \mathbf{J}' ebenfalls den Vertauschungsrelationen (3.3) der Drehgruppe genügt, obwohl bei der Transformation schiefwinklige Koordinaten entstehen. Die Algebra der Drehgruppe ist invariant.

Das können wir ausnutzen, um zu anderen Darstellungen überzugehen. Besonders einfach ist die zweidimensionale. Die halben Paulimatrizen $\sigma/2$ genügen ebenfalls den Vertauschungsrelationen

(3.3). Darum kann man (3.1) durch die v. Neumannsche Gleichung der Quantenmechanik [15]

$$i(\mathrm{d}P/\mathrm{d}t) = [H, P] \quad (3.4)$$

ersetzen mit

$$P = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad H = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.5)$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} i\dot{P} &= -\frac{1}{2}\dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ [H, P] &= -\frac{1}{4}[\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}] = -\frac{i}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned}$$

Umgekehrt kann man \mathbf{p} mittels

$$\mathbf{p} = -\text{Spur}(\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.6)$$

aus P berechnen. Die Abbildung von \mathbf{p} auf P ist also umkehrbar. Die Matrix P beschreibt wie der Vektor \mathbf{p} den Zustand der Gesamtheit und heißt ‚v. Neumannsche Zustandsmatrix‘. H ist der ‚Hamilton-Operator‘.

Innerhalb von (3.4) ist die Einheitsmatrix in (3.5) belanglos. Doch sorgt sie für bequeme Eigenschaften von P . Die Zustandsmatrix ist klarerweise Hermitesch und hat die Spur 1.

$$P^\dagger = P, \quad \text{Spur } P = 1. \quad (3.7)$$

Speziell in Verbindung mit (3.6) und (3.1) erhält man daraus

$$w = P_{22} - P_{11}, \quad w_0 = P_{11}, \quad w_1 = P_{22}. \quad (3.8)$$

Außerdem ist die Matrix P für zulässige Vektoren $\mathbf{p}^2 < 1$ positiv definit. Denn aus

$$P^2 = P - \frac{1}{4}(1 - \mathbf{p}^2) \quad (3.9)$$

folgt für beliebige einspaltige Matrizen $u \neq 0$

$$u^\dagger P u = (P u)^\dagger (P u) + \frac{1}{4}(1 - \mathbf{p}^2) u^\dagger u > 0. \quad (3.10)$$

Im Einklang damit sind w_0 und w_1 in (3.8) nichtnegativ. Für reine Gesamtheiten folgt aus (3.9)

$$P^2 = P. \quad (3.11)$$

Die Hermiteschen Matrizen P haben zwei reelle Eigenwerte. Die Eigenlösungen ergeben sich aus

$$\begin{aligned} P \Phi &= \lambda \Phi, \quad P \Phi' = \lambda' \Phi', \\ \Phi^\dagger \Phi' &= 0, \quad \Phi^\dagger \Phi = \Phi'^\dagger \Phi' = 1. \end{aligned}$$

Das ergibt

$$P = \lambda \Phi \Phi^\dagger + \lambda' \Phi' \Phi'^\dagger.$$

Nach (3.11) erhält man daraus für reine Gesamtheiten

$$\lambda^2 \Phi \Phi^\dagger + \lambda'^2 \Phi' \Phi'^\dagger = \lambda \Phi \Phi^\dagger + \lambda' \Phi' \Phi'^\dagger,$$

also $\lambda^2 = \lambda$ und $\lambda'^2 = \lambda'$ und aufgrund von (3.7) z.B. $\lambda = 1, \lambda' = 0$. Somit sind reine Gesamtheiten gemäß

$$P = \Phi \Phi^\dagger, \quad \Phi^\dagger \Phi = 1, \quad (3.12)$$

durch eine einzige einspaltige und normierte Matrix bestimmt. Diese heißt ‚Zustandsvektor‘. Ist

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \end{pmatrix}, \text{ so folgt aus (3.8)}$$

$$w_0 = \Phi_0^* \Phi_0, \quad w_1 = \Phi_1^* \Phi_1. \quad (3.13)$$

Damit sind die Wahrscheinlichkeiten, wie man es nach Schrödinger erwartet, durch ‚Wahrscheinlichkeitsamplituden‘ bestimmt.

Dafür gelten Schrödinger-Gleichungen [16]. Substitution von (3.12) in (3.4) ergibt

$$(i\dot{\Phi} - H \Phi) \Phi^\dagger = \Phi (-i\dot{\Phi}^\dagger - \Phi^\dagger H).$$

Daraus folgt für

$$i\dot{\Phi} - H \Phi = \chi, \quad -i\dot{\Phi}^\dagger - \Phi^\dagger H = \chi^\dagger$$

die Gleichung

$$\chi \Phi^\dagger = \Phi \chi^\dagger,$$

wonach

$$\chi = \Phi (\chi^\dagger \Phi) = \lambda_0 \Phi, \quad \chi^\dagger = (\Phi^\dagger \chi) \Phi^\dagger \equiv \lambda_0^* \Phi^\dagger$$

und λ_0 eine vielleicht noch zeitabhängige Zahl ist. Ersetzt man

$$\Phi \rightarrow \Phi e^{iA}, \quad A = \int \lambda_0 \mathrm{d}t,$$

so erhält man die Schrödinger-Gleichung und ihre adjugierte,

$$i\dot{\Phi} = H \Phi, \quad -i\dot{\Phi}^\dagger = \Phi^\dagger H. \quad (3.14)$$

Durch den Übergang zur v. Neumannschen Darstellung von (2.11) und zur Schrödinger-Gleichung wird die Homogenität der Zeit nicht gestört. H ist wie $\boldsymbol{\Omega}$ zeitunabhängig. Die Zeit lässt sich mittels des Ansatzes

$$\Phi(t) = \Phi e^{-i\omega t}, \quad \Phi = \text{const}, \quad (3.15)$$

eliminieren, und es ergibt sich die Schrödinger-Gleichung in der zeitunabhängigen Form

$$H \Phi = \omega \Phi, \quad (3.16)$$

nach der die Zustandsvektoren Eigenlösungen des Hamilton-Operators H sind. Es gilt

$$\begin{aligned} H \Phi_r &= \omega_r \Phi_r, \quad \Phi_r^\dagger \Phi_s = \delta_{rs}, \\ H &\equiv \sum_r \omega_r \Phi_r \Phi_r^\dagger, \quad r \in (1, 2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Schrödinger-Gleichung ist gegen konstante Phasentransformationen invariant. Denn bei Substitution von

$$\Phi \rightarrow \Phi e^{i\beta}, \quad \beta = \text{const}, \quad (3.18)$$

fällt der Phasenfaktor β heraus. Er kommt in den Zustandsmatrizen gemäß

$$\Phi \Phi^\dagger \rightarrow \Phi \Phi^\dagger \quad (3.19)$$

überhaupt nicht vor.

Eine andere Symmetrieeigenschaft ist unmittelbar von Bedeutung. Nach (3.6) erhält man für reine Gesamtheiten

$$\mathbf{p} = -\Phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Phi. \quad (3.20)$$

Bei der Transformation

$$\Phi \rightarrow e^{+i\chi\sigma_3} \Phi, \quad \Phi^\dagger \rightarrow \Phi e^{-i\chi\sigma_3}, \quad \chi = \text{const}, \quad (3.21)$$

geht \mathbf{p} in

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= -\Phi^\dagger (\cos \chi - i \sin \chi \sigma_3) \boldsymbol{\sigma} (\cos \chi + i \sin \chi \sigma_3) \Phi, \\ p'_1 + i p'_2 &= e^{-2\chi i} (p_1 + i p_2), \quad p'_3 = p_3 \end{aligned}$$

über. Die unmittelbar beobachtbare Wahrscheinlichkeitsspanne $w = p_3$ bleibt invariant. Doch ist der Winkel 2χ ebenso wie der äquivalente Azimutwinkel von $\boldsymbol{\Omega}$ in $\Omega_1 + i \Omega_2$ (Gl. (2.11)) unbeobachtbar.

Von größerer Bedeutung ist die Forminvarianz der Schrödinger-Gleichung bei beliebigen unitären Transformationen. Mittels

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U \Phi, \quad U^\dagger U = 1, \quad U = \text{const}, \quad (3.22)$$

erhält man aus (3.14)

$$i \dot{\Phi}' = H' \Phi', \quad H' = U H U^\dagger, \quad (3.23)$$

und aus (3.20)

$$\mathbf{p}' = \Phi'^\dagger \boldsymbol{\sigma}' \Phi', \quad \boldsymbol{\sigma}' = U \boldsymbol{\sigma} U^\dagger. \quad (3.24)$$

Die alten Gleichungen bleiben erhalten. Doch transformieren sich die Operatoren. Im allgemeinen ändert sich σ_3 seine Gestalt. Nach der Transformation definiert σ'_3 im allgemeinen keine beobachtbare Größe mehr.

Das kann man benutzen, um Größen, die nicht unmittelbar beobachtbar sind, durch Einschaltung geeigneter Geräte beobachtbar zu machen. Eine vollständige Formulierung des Problems erfordert mehr als die Betrachtung von Elementarprozessen. Doch kann man den Kern des Problems bereits hier erkennen.

Schalten wir während einer gewissen Zeit ein Meßinstrument ein, so ändert sich während dieser auch in dem betrachteten Punkt der Hamilton-Operator etwa gemäß

$$H_M = \begin{cases} H & \text{für } t < 0 \text{ und } t > \tau, \\ H + M/\tau & \text{für } 0 \leq t \leq \tau. \end{cases} \quad (3.25)$$

Darin beschreibt M den Einfluß des Meßgeräts. In der Zeitspanne $(0, \tau)$ ändert sich der Zustandsvektor. Aus $\Phi(0)$ folgt

$$\Phi(\tau) = e^{-i(H\tau+M)} \Phi(0).$$

Das ergibt im Grenzfall $\tau \rightarrow 0$, also im Grenzfall stoßartiger Messungen

$$\Phi' = e^{-iM} \Phi, \quad (3.26)$$

worin Φ und Φ' die Amplituden vor und nach der Messung sind. Nach Ablauf der Messung ergibt die Beobachtung

$$w = -\Phi'^\dagger \sigma'_3 \Phi'.$$

Bezogen auf die Amplituden vor der Messung kann man dafür schreiben

$$w = -\Phi^\dagger \sigma'_3 \Phi, \quad \sigma'_3 = e^{iM} \sigma_3 e^{-iM}. \quad (3.27)$$

Durch die Messung ist also der Erwartungswert der nicht unmittelbar beobachtbaren Größe σ'_3 vor dem Meßvorgang bestimmt.

Man vergleiche das mit einer klassisch physikalischen ballistischen Impulsmessung, bei der man aus dem ersten Pendelausschlag auf den Impuls des Projektils kurz vor dem Einschlag schließt. Trotz aller Unterschiede zwischen klassischer Physik und Quantenphysik handelt es sich um dieselbe Meßidee.

Nun läßt sich die in § 2 noch offene Frage beantworten, wie man reine Gesamtheiten realisieren kann, für die $|w| < 1$ ist. Da Schrödinger-Gleichungen reine Gesamtheiten in ebensolche überführen, auch wenn sich H durch irgendwelche Geräte ändert, erfährt $\boldsymbol{\Omega}$ bei Einschaltung eines Gerätes eine Transformation. Wenn vorher $w_{\max} = +1$ ist, und wenn sich bei der Transformation die Richtung

von Ω der von w_{\min} nähert, wird nachher $w_{\max} < 1$ sein. Entsprechendes gilt, wenn wir von $w_{\min} = -1$ ausgehen. Man kann also beliebige reine Gesamtheiten herstellen, auch wenn man mit einer speziellen beginnt, die unmittelbar als reine erkennbar ist. Beispielsweise erhält man eine solche, wie sich zeigen wird, näherungsweise, wenn ein Teilchenstrahl mit bestimmtem Impuls durch eine enge Blende läuft.

An dieser Stelle werden einige bereits allgemein gültige Ergebnisse sichtbar, die wir hier in Anlehnung an obige Ergebnisse für $n \times n$ -Matrizen formulieren, noch bevor wir die Verallgemeinerung physikalisch begründet einführen. Jede Hermitesche und von der Einheit verschiedene Matrix G definiert wie σ in (3.20) eine physikalische Größe. Ihr Erwartungswert ist

$$\langle G \rangle = \Phi^\dagger G \Phi, \quad \text{falls } \Phi^\dagger \Phi = 1. \quad (3.28)$$

Der Name rechtfertigt sich nach Einführung der Eigenlösungen

$$G \Phi_r = g_r \Phi_r, \quad \Phi_r^\dagger \Phi_s = \delta_{rs}, \quad \sum_r \Phi_r \Phi_r^\dagger = 1,$$

denn aus

$$\Phi = \sum_r c_r \Phi_r \quad \text{folgt} \quad c_r = \Phi_r^\dagger \Phi, \quad \Phi^\dagger \Phi = \sum_r c_r^* c_r = 1$$

folgt

$$\langle G \rangle = \sum_r g_r c_r^* c_r$$

und das heißt: Die Eigenwerte sind die Werte, welche die Größe G annehmen kann, und $|c_r|^2$ sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Werte vorkommen.

Seien E_r Einheitsvektoren mit dem Element 1 in r -Richtung, so ist

$$U = \sum_r E_r \Phi_r^\dagger$$

eine unitäre Transformation, die die Vektoren Φ_r in E_r transformiert. Wenn die Zustände E_r unmittelbar beobachtbar sind, kennzeichnet M in $U = e^{-iM}$ dasjenige Gerät, welches die Wahrscheinlichkeiten liefert, mit denen alle Φ_r in Φ vor Einschaltung des Gerätes vorkommen.

Eine Größe G , welche wie oben durch eine $n \times n$ -Matrix dargestellt wird, enthält im allgemeinen (ohne Einheitsmatrix) $n^2 - 1$ linear unabhängige Hermitesche Matrizen, von denen je $n - 1$ durch unitäre Transformationen gemeinsam auf Diagonalf orm gebracht werden können. Sie sind im Prinzip

gleichzeitig beobachtbar, die übrigen $n(n - 1)$ -Matrizen erst nach Einschaltung von Meßgeräten. Im Falle $n = 2$ gibt es nur eine unmittelbar beobachtbare Größe, nämlich σ_3 , und zwei durch Geräte beobachtbare, etwa σ_1 und σ_2 . Hier ist der wesentliche Punkt, daß die physikalische Bedeutung der Größen aus dem Basiskonzept abgeleitet ist. Eine Bezugnahme auf klassische Vorstellung ist, wenn auch oft hilfreich, grundsätzlich überflüssig.

Für die zeitlichen Änderungen von Erwartungswerten erhält man aus der Schrödinger-Gleichung

$$\frac{d}{dt} (\Phi^\dagger G \Phi) = \Phi^\dagger \left(\frac{\partial G}{\partial t} + i [H, G] \right) \Phi \equiv \Phi^\dagger \frac{dG}{dt} \Phi. \quad (3.29)$$

Danach ist die Zeitableitung des Erwartungswertes einer Größe G gleich dem Erwartungswert der totalen Zeitableitung von G , welche durch

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + i [H, G] \quad (3.30)$$

definiert ist [17].

Integrale der Bewegung liegen vor, wenn $dG/dt = 0$ ist. Beispielsweise ist der Hamilton-Operator H wegen der Homogenität der Zeit, nach der $\partial H/\partial t = 0$ ist, und wegen $[H, H] = 0$ ein Integral. Als Folge der Zeithomogenität liefert H die Energie. Allein die Verbundenheit mit der Zeithomogenität stellt sicher, daß der quantenphysikalische Hamilton-Operator wie die klassisch physikalische Hamilton-Funktion die Energie liefert.

Bei der Untersuchung des Zusammenspiels vieler Elementarprozesse wird es zweckmäßig sein, andere Basismatrizen als die Paulischen zu verwenden, nämlich

$$\begin{aligned} \psi^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \psi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \psi^\dagger \psi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \psi \psi^\dagger &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die Zustände „leer“ und „besetzt“ werden durch

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \psi^\dagger |0\rangle &= |1\rangle, & \psi |1\rangle &= |0\rangle; \\ \psi |0\rangle &= 0, & \psi^\dagger |1\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Das bedeutet: ψ^\dagger erzeugt ein Teilchen, wenn keines vorhanden ist, und ψ vernichtet ein vorhandenes. Darum heißen ψ^\dagger und ψ „Erzeugungsoperator“ und „Vernichtungsoperator“. In leeren Punkten kann kein Teilchen vernichtet werden, in besetzten keines erzeugt. Dem entsprechen die beiden letzten Gleichungen, in denen die Null auf der rechten Seite bedeutet, daß der Zustand, der durch die Operationen entstehen könnte, nicht existiert. Insbesondere ist die letzte Gleichung damit in Einklang, daß wir Doppelbesetzungen ausgeschlossen haben.

Stellt man die Zustände „leer“ und „besetzt“ durch hermitesch konjugierte einzeilige Matrizen

$$\langle 0 | = (1, 0), \quad \langle 1 | = (0, 1)$$

dar, so vertauschen die Operatoren ihre Bedeutung. Denn aus (3.32) folgt

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi &= \langle 1 |, & \langle 1 | \psi^\dagger &= \langle 0 |, \\ \langle 0 | \psi^\dagger &= 0, & \langle 1 | \psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die Namen Erzeugungs- und Vernichtungsoperator sind also stets auf die Darstellung in (3.32) bezogen. Beide Systeme von Basisvektoren sind gemäß

$$\langle i | k \rangle = \delta_{ik}, \quad i, k \in (0, 1),$$

orthonormiert und liefern die Basis für kontragradienten Darstellungen der Zustandsvektoren, nämlich

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= (\Phi_0 + \Phi_1 \psi^\dagger) |0\rangle, \\ \langle\Phi| &= \langle 0 | (\Phi_0^* + \Phi_1^* \psi). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Man spricht von der KET- und der BRA-Darstellung der Vektoren oder kurz von KET- bzw. BRA-Vektoren. Beispielsweise ist das Skalarprodukt eines Vektors $|\Phi\rangle$ mit dem transformierten Vektor $|\Phi'\rangle = A |\Phi\rangle$ gleich

$$\langle\Phi|\Phi'\rangle = \langle\Phi|A|\Phi\rangle.$$

Hierin erscheinen $\langle\Phi|$ und $|\Phi\rangle$ wie Klammern, was zu den Kunstworten BRA und KET aus BRACKET geführt hat.

Die Bedeutung der Operatoren ψ^\dagger und ψ beruht darauf, daß man nicht mehr explizit mit Matrizen rechnen muß, sondern rein algebraisch vorgehen kann, wobei am Ende die „Vakuumbedingungen“

$$\psi|0\rangle = 0, \quad \langle 0 | \psi^\dagger = 0, \quad \langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad (3.35)$$

zu Zahlen führen. Beispielsweise gilt für das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle\Phi|\Phi'\rangle &= \langle 0 | (\Phi_0^* + \Phi_1^* \psi) (\Phi_0' + \Phi_1' \psi^\dagger) |0\rangle \\ &= \Phi_0^* \Phi_0' + \Phi_1^* \Phi_1', \end{aligned}$$

wie aus den Vakuumbedingungen folgt, wenn man $\psi \psi^\dagger = 1 - \psi^\dagger \psi$ benutzt.

KET- und BRA-Vektoren lassen sich verallgemeinerungsfähig wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= F(\psi^\dagger) |0\rangle, \\ \langle\Phi| &= \langle 0 | F(\psi^\dagger)^\dagger \equiv \langle 0 | \bar{F}(\psi). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Darin kann $F(\psi^\dagger)$ im Prinzip eine beliebige Funktion sein. Wegen $\psi^{\dagger 2} = 0$ und $\psi^2 = 0$ bleiben aber hier stets nur lineare Funktionen übrig.

Entsprechend lassen sich irgendwelche Größen G als beliebige Funktionen

$$G = G(\psi^\dagger, \psi) \quad (3.37)$$

von ψ^\dagger und ψ darstellen. Doch bleiben nur lineare und bilineare Glieder übrig wie in

$$G = a + b \psi^\dagger + b^* \psi + c \psi^\dagger \psi = \begin{pmatrix} a, & b^* \\ b, & a + c \end{pmatrix} = G^\dagger.$$

Der ebenfalls mögliche Term $\psi \psi^\dagger$ kann mittels $\psi \psi^\dagger = 1 - \psi^\dagger \psi$ stets zugunsten von $\psi^\dagger \psi$ eliminiert werden.

Erwartungswerte schreiben sich in der Form

$$\langle G \rangle = \langle 0 | (\Phi_0^* + \Phi_1^* \psi) G (\Phi_0 + \Phi_1 \psi^\dagger) | 0 \rangle \quad (3.38)$$

Speziell erhält man z. B.

$$\begin{aligned} \langle\psi\rangle &= \langle 0 | (\Phi_0^* + \Phi_1^* \psi) \psi (\Phi_0 + \Phi_1 \psi^\dagger) | 0 \rangle \\ &= \Phi_1 \langle 0 | \Phi_0^* + \Phi_1^* \psi | 0 \rangle = \Phi_0^* \Phi_1. \end{aligned}$$

Zum Schluß sei noch eine fundamentale Eigenschaft von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren genannt, die weitreichende Folgen haben wird. Wir wissen, daß w bei der Transformation

$$U = \cos \alpha + i \sigma_3 \sin \alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha (\psi \psi^\dagger - \psi^\dagger \psi)$$

invariant ist. Daraus folgt, da für ψ die Transformation

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi' &= (\cos \alpha - i \sin \alpha (\psi \psi^\dagger - \psi^\dagger \psi)) \\ &\quad \cdot \psi (\cos \alpha + i \sin \alpha (\psi \psi^\dagger - \psi^\dagger \psi)), \end{aligned}$$

bzw.

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-2i\alpha}, \quad \psi^\dagger \rightarrow \psi'^\dagger = \psi^\dagger e^{+2i\alpha} \quad (3.39)$$

gilt, daß die Operatoren ψ und ψ^\dagger nur bis auf einen Phasenfaktor bestimmt sind, was zu Eichfeldtheorien führen wird.

§ 4. Das Zusammenspiel von Elementarprozessen

Die quantenphysikalische Beschreibung der Elementarprozesse in § 3 ist aus der stochastischen durch eine Transformation hervorgegangen, enthält also physikalisch nichts Neues. Der Übergang zu beliebigen physikalischen Systemen erfordert ein weiteres Axiom. Wie man in der klassischen Physik von der Feststellung ausgeht, alles Geschehen sei auf Bewegungen der Teilchen eines physikalischen Systems zurückführbar, so beginnen wir hier mit der Vorstellung, alles Geschehen sei ein Zusammenspiel unterscheidbarer, aber gleichartiger Elementarprozesse. Zunächst nehmen wir an, daß es nur endlich viele Elementarprozesse gibt. Der Übergang zu unendlich vielen erfordert eine besondere Betrachtung.

Sei Z gleich der Anzahl der Elementarprozesse, z.B. solcher, die in verschiedenen Raumpunkten stattfinden, so gibt es Z -Paare von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die wir gemäß

$$\begin{aligned}\chi_i^\dagger &= \psi^\dagger \times 1 \times 1 \times \dots \times 1, \quad \chi_2^\dagger = 1 \times \psi^\dagger \times 1 \times \dots \times 1, \dots \\ \chi\chi^\dagger &= 1 \times 1 \times 1 \times \dots \times \psi^\dagger, \\ \chi_1 &= \psi \times 1 \times 1 \times \dots \times 1, \quad \chi_2 = 1 \times \psi \times 1 \times \dots \times 1, \dots \\ \chi\chi &= 1 \times 1 \times 1 \times \dots \times \psi\end{aligned}$$

als direkte Produkte der elementaren Operatoren ψ^\dagger und ψ mit Einheitsmatrizen schreiben können. Das ist eine naheliegende Definition, welche wir mittels einer auf Jordan und Wigner zurückgehenden Transformation modifizieren werden, weil die Operatoren χ_i^\dagger und χ_i wegen einer Fallunterscheidung unbequemen Vertauschungsrelationen genügen. Sie werden nämlich für $i = k$ mit Plusklammern $\{a, b\} = ab + ba$ gebildet gemäß

$$\{\chi_i^\dagger, \chi_i^\dagger\} = 0, \quad \{\chi_i, \chi_i^\dagger\} = 1, \quad \{\chi_i, \chi_i\} = 0,$$

und für $i \neq k$ mit Minusklammern $[a, b] = ab - ba$ gemäß

$$[\chi_i^\dagger, \chi_k^\dagger] = 0, \quad [\chi_i, \chi_k^\dagger] = 0, \quad [\chi_i, \chi_k] = 0.$$

Ist $|0\rangle$ auch hier das Vakuum, also derjenige Zustand in dem kein Teilchen existiert, so gelten die Vakuumbedingungen

$$\chi_i |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | \chi_i^\dagger = 0, \quad \langle 0 | 0 \rangle = 1,$$

und Teilchenzustände werden wie in (3.36) durch

$$|\Phi\rangle = F(\chi^\dagger) |0\rangle, \quad \langle \Phi | = \langle 0 | \bar{F}(\chi)$$

dargestellt. Darin stehen χ^\dagger und χ für die ganzen Sätze der Operatoren χ_i^\dagger und χ_i . Da die Operatorquadrate gleich 0 sind, entstehen multilineare Polynome.

Die Jordan-Wignersche Transformation [18] erhält man mittels der Operatoren

$$\Pi_1 = 1, \quad \Pi_i = \prod_{k=0}^{i-1} (1 - 2\chi_k^\dagger \chi_k) \quad \text{für } i > 1,$$

die den Gleichungen

$$\Pi_i^\dagger = \Pi_i, \quad [\Pi_i, \Pi_k] = 0, \quad \Pi_i^2 = 1 \quad (4.2)$$

genügen, wie aus

$$(1 - 2\chi^\dagger \chi)^2 = 1 - 4\chi^\dagger \chi + 4\chi^\dagger \chi \chi^\dagger \chi = 1$$

hervorgeht. Die transformierten Operatoren lauten

$$\psi_i = \Pi_i \chi_i, \quad \psi_i^\dagger = \chi_i^\dagger \Pi_i. \quad (4.3)$$

Offensichtlich gelten die Vakuumbedingungen

$$\psi_i |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | \psi_i^\dagger = 0, \quad \langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad (4.4)$$

unverändert. Die Vertauschungsrelationen enthalten jedoch nur noch Plusklammern. Es gilt uneingeschränkt

$$\{\psi_i^\dagger, \psi_k^\dagger\} = 0, \quad \{\psi_i, \psi_k^\dagger\} = \delta_{ik}, \quad \{\psi_i, \psi_k\} = 0. \quad (4.5)$$

Nach dieser Transformation können wir die χ -Operatoren vergessen. Die Zustandsvektoren lauten

$$\begin{aligned}|\Phi\rangle &= F(\psi^\dagger) |0\rangle, \\ \langle \Phi | &= \langle 0 | F(\psi)^\dagger \equiv \langle 0 | \bar{F}(\psi),\end{aligned} \quad (4.5)$$

worin die Funktionen wiederum multilineare Polynome sind.

Zur Erläuterung der Beweise von (4.5) betrachten wir den Sonderfall $i < k$ und

$$\{\psi_i, \psi_k^\dagger\} = \Pi_i \chi_i \chi_k^\dagger \Pi_k + \chi_k^\dagger \Pi_k \Pi_i \chi_i.$$

Aus

$$(1 - 2\chi^\dagger \chi) \chi = -\chi (1 - 2\chi^\dagger \chi),$$

$$\chi^\dagger (1 - 2\chi^\dagger \chi) = -(1 - 2\chi^\dagger \chi) \chi^\dagger$$

folgt, da Π_i mit allen Operatoren vertauschbar ist und Π_k mit χ_k^\dagger und χ_k , aus der rechten Seite der Kommutatorgleichung

$$-\Pi_i \Pi_k (\chi_i \chi_k^\dagger - \chi_k^\dagger \chi_i) = 0,$$

womit sich die Behauptung $\{\psi_i, \psi_k^\dagger\} = 0$ für $i < k$ bestätigt. Entsprechend beweist man die übrigen Relationen.

Folgende Zustandsvektoren bilden eine vollständige orthonormierte Basis

$$\begin{aligned} |k, \mathbf{i}\rangle &\equiv |i_1 i_2 \dots i_k\rangle = \psi_{i_1}^\dagger \psi_{i_2}^\dagger \dots \psi_{i_k}^\dagger |0\rangle, \\ \langle k, \mathbf{i}| &\equiv \langle i_1 i_2 \dots i_k| = \langle 0| \psi_{i_k} \dots \psi_{i_2} \psi_{i_1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Permutationen P ergeben

$$\begin{aligned} |k, P\mathbf{i}\rangle &= (-1)^p |k, \mathbf{i}\rangle, \\ \langle k, P\mathbf{i}| &= (-1)^p \langle k, \mathbf{i}|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Darin ist p die Ordnung der Permutation P . Permutationen von \mathbf{i} liefern also keine neuen Zustände. Die Darstellung der Vektoren in (4.7) ist eindeutig, wenn wir eine geordnete Indexfolge voraussetzen, z.B. $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Beim Beweis der Orthogonalitätsrelationen

$$\langle k, \mathbf{i}|k', \mathbf{i}'\rangle = \delta_{kk'} \delta_{ii'} \quad (4.9)$$

ist die geordnete Darstellung bequem. Wenn es in $|k', \mathbf{i}'\rangle$ einen Faktor ψ_j^\dagger gibt, dessen Gegenstück ψ_j in $|k, \mathbf{i}\rangle$ nicht vorkommt, kann man ihn unter Vorzeichenwechseln nach links verschieben, bis $\langle 0| \psi_j^\dagger = 0$ entsteht. Entsprechendes gilt für ψ_j , wenn ψ_j^\dagger nicht vorkommt, bei Verschiebung nach rechts, bis $\langle 0| \psi_j = 0$ entsteht. Die linke Seite von (4.9) verschwindet also, wenn für geordnete \mathbf{i} $k \neq k'$ oder wenigstens $\mathbf{i} \neq \mathbf{i}'$ ist. Für $\mathbf{i} = \mathbf{i}'$ erhält man

$$\langle 0| \psi_{i_k} \dots \psi_{i_2} \psi_{i_1} \psi_{i_1}^\dagger \psi_{i_2}^\dagger \dots \psi_{i_k}^\dagger |0\rangle.$$

Darin ist $\psi_{i_1} \psi_{i_1}^\dagger = 1 - \psi_{i_1}^\dagger \psi_{i_1}$ mit 1 äquivalent, weil man ψ_{i_1} im zweiten Summanden ganz nach rechts bringen kann. Dasselbe gilt der Reihe nach für alle Paare $\psi_{i_v} \psi_{i_v}^\dagger$, so daß am Ende $\langle 0| 0\rangle = 1$ übrig bleibt im Einklang mit (4.8).

Unter Zusammenspiel verstehen wir also zunächst, daß der Zustandsraum in der angegebenen Weise allein durch die Basisoperatoren ψ_i^\dagger und ψ_i , $i \in (1, 2, \dots, Z)$, bestimmt ist. Betrachtet man nur die in § 3 eingeführten Prozesse, so gelangt man zu den Zustandsvektoren

$$\langle \Phi \rangle = \prod_{i=1}^Z (\varphi_{i_0} + \varphi_{i_1} \psi_i^\dagger) |0\rangle. \quad (4.9)$$

Darin sind $|\varphi_{i_0}|^2$ und $|\varphi_{i_1}|^2$ die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß der i -te Platz leer bzw. besetzt ist. Löst man die Klammern auf, so erhält man 2^Z Summanden, unter denen z.B.

$$\varphi_{k_1} \varphi_{l_1} \left(\prod_{i \neq k, l} \varphi_{i_0} \right) \psi_{k_1}^\dagger \psi_{l_1}^\dagger |0\rangle$$

vorkommt. Danach ist

$$|\varphi_{k_1}|^2 |\varphi_{l_1}|^2 \prod_{i \neq k, l} |\varphi_{i_0}|^2$$

die Wahrscheinlichkeit für den speziell herausgegriffenen Besetzungszustands.

Nach diesem Ergebnis sind die Wahrscheinlichkeiten an den Stellen $i \in (1, 2, \dots, Z)$ statistisch unabhängig. Sie sind es bisher sogar physikalisch, denn wir haben nur vorausgesetzt, was an jeder Stelle unabhängig von übrigen geschehen kann. Es gibt noch keine Wechselwirkung zwischen den Stellen.

Klarerweise sind wir an Wechselwirkungen interessiert. Das sind bisher noch nicht berücksichtigte Vorgänge, durch die das eigentliche Zusammenspiel bestimmt wird. Es besteht darin, daß das Geschehen an einer Stelle das an anderen nachzieht. Die Elementarprozesse an verschiedenen Stellen sind nicht mehr unabhängig, wodurch im allgemeinen auch die statistische Unabhängigkeit verloren gehen muß. Wahrscheinlichkeiten wie die obigen lassen sich nicht mehr faktorisieren.

An die Stelle der Produkte in (4.9) treten beliebige multivariate Polynome

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= F(\psi^\dagger) |0\rangle = \left\{ \Phi_0 + \frac{1}{1!} \sum_{i_1} \Phi_1(i_1) \psi_{i_1}^\dagger \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \sum_{i_1 i_2} \Phi_2(i_1 i_2) \psi_{i_1}^\dagger \psi_{i_2}^\dagger + \dots \right\} |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\langle \Phi | = \langle 0 | \bar{F}(\psi) = \langle 0 | \left\{ \Phi_0^* + \frac{1}{1!} \sum_{i_1} \Phi_1^*(i_1) \psi_{i_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \sum_{i_1 i_2} \Phi_2^*(i_1 i_2) \psi_{i_2} \psi_{i_1} + \dots \right\}.$$

Klarerweise sind die Funktionen $\Phi_k(\mathbf{i})$ gemäß

$$\Phi_k(P\mathbf{i}) = (-1)^p \Phi_k(\mathbf{i}) \quad (4.11)$$

schiefsymmetrisch. Die Faktoren $1/k!$ bewirken, daß in den Summen, die über alle Permutationen laufen, gleiche Zustände nur einmal gezählt werden. Wie oben ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten

$$w_k(\mathbf{i}) = |\Phi_k(\mathbf{i})|^2, \quad w_k(P\mathbf{i}) = w_k(\mathbf{i}). \quad (4.12)$$

Sie sind bei Permutationen von \mathbf{i} klarerweise symmetrisch, lassen sich aber im allgemeinen nicht mehr in Faktoren zerlegen, von denen jeder nur auf eine Stelle bezogen ist. Aus der Normierung von

$\Phi\rangle$ folgt

$$\begin{aligned}\langle\Phi|\Phi\rangle &= w_0 + \frac{1}{1!} \sum_{i_1} w_1(i_1) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \sum_{i_1 i_2} w_2(i_1 i_2) + \dots = 1.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Wenn wir von vorneherein wüßten, daß sich die Zustandsvektoren $|\Phi\rangle$ auch in zusammengesetzten Systemen linear transformierten, so könnten wir sagen, daß eine Schrödinger-Gleichung

$$i|\dot{\Phi}\rangle = H(\psi^\dagger, \psi)|\Phi\rangle \quad (4.14)$$

gilt, in der der Hamilton-Operator eine Funktion von ψ^\dagger und ψ ist, die sich als Multilinear herausstellt.

Tatsächlich wissen wir, daß sich die v. Neumannsche Matrix P als Repräsentant einer Gibbsschen Gesamtheit linear transformieren muß. Die allgemeinste Form einer solchen Transformation lautet

$$P' = \sum_i A_i P B_i = \sum_i B_i^\dagger P A_i^\dagger,$$

worin der zweite Ausdruck aus der Hermitezität folgt. Führt man die infinitesimalen Transformationen $A_i = 1 + a_i dt$, $B_i = 1 + b_i dt$ ein, so folgt daraus

$$\begin{aligned}dP/dt &= a P + P b = b^\dagger P + P a^\dagger, \\ a &= \sum_i a_i, \quad b = \sum_i b_i.\end{aligned}$$

Bedeutet $P = 1$ vollständige Unkenntnis, und ergibt sich Kenntnis nicht durch Abwarten, so muß $P = 1$ eine Lösung sein. Daraus folgt

$$a + b = b^\dagger + a^\dagger = 0.$$

Aus der Hermitezität von P erhält man

$$a = -iH, \quad b = +iH, \quad H^\dagger = H$$

und damit die allgemeine v. Neumannsche Gleichung

$$i\dot{P} = [H, P]. \quad (4.15)$$

Das ergibt wie früher die Schrödinger-Gleichung in (4.14).

Lineare Transformationen des Vektorraums sind Linearkombinationen der dyadischen Produkte von Basisvektoren

$$k', \vec{i}'\rangle \langle k, \vec{i} = \psi_{i_1}^\dagger \psi_{i'_2}^\dagger \dots \psi_{i'_k}^\dagger |0\rangle \langle 0| \psi_{i_k} \dots \psi_{i_2} \psi_{i_1}.$$

Solche Produkte transformieren den Vektor $|k, \vec{i}\rangle$ in $|k', \vec{i}'\rangle$ und annulieren alle anderen. Der Operator

$|0\rangle \langle 0$ projiziert alle Vektoren in den Vakuumzustand. Folglich ist

$$|0\rangle \langle 0 \equiv \prod_{i=1}^Z \psi_i \psi_i^\dagger.$$

Daraus ergibt sich, daß die dyadischen Produkte Funktionen von ψ^\dagger, ψ sind, ebenso die Hamilton-Operatoren im Einklang mit (4.14).

Damit sind die Zustandsvektoren, die Wahrscheinlichkeiten und die zeitlichen Änderungen der Zustände in einem endlichdimensionalen Vektorraum bestimmt. Es gibt $\binom{Z}{k}$ Basisvektoren $|k, \vec{i}\rangle$ und insgesamt

$$\sum_{k=0}^Z \binom{Z}{k} = 2^Z \quad (4.16)$$

Basisvektoren. Der Zustandsraum ist also 2^Z -dimensional. Damit sind die endlichdimensionalen quantenphysikalischen Gleichungen aus der Grundvorstellung abgeleitet. Einige der wichtigsten Folgegleichungen für $n \times n$ Matrizen haben wir bereits am Ende von § 3 untersucht.

Die Frage nach der Gestalt des Hamilton-Operators ist noch offen. Bei dem Versuch, sie aus Prinzipien zu gewinnen, stößt man auf eine Schwierigkeit, die sich erst beim weiteren Ausbau der Theorie bewältigen läßt. Bezeichnen wir mit (1), (ψ) , (ψ^\dagger) , $(\psi\psi)$, $(\psi\psi^\dagger)$, $(\psi^\dagger\psi^\dagger)$, $(\psi\psi\psi)$ usw. homogene Formen des in den Klammern angedeuteten Typs, so könnten die ersten Terme eines Hamilton-Operators die Form

$$\begin{aligned}H &= (1) + (\underline{\psi}) + (\underline{\psi^\dagger}) + (\underline{\psi\psi}) \\ &\quad + (\underline{\psi\psi^\dagger}) + (\underline{\psi^\dagger\psi^\dagger}) + (\underline{\psi\psi\psi}) + \dots\end{aligned}$$

haben. Darin sind die einfach unterstrichenen Terme teilchenerzeugend, die zweifach unterstrichenen teilchenvernichtend, und die übrigen lassen die Teilenzahl unverändert.

Nach (3.39) hat jedes Operatorpaar eine eigene unbestimmte Phase. Es besteht kein Anlaß anzunehmen, das ändere sich bei Wechselwirkung. Der Hamilton-Operator muß also gegen willkürliche Phasentransformationen

$$\psi_i \rightarrow \psi_i e^{+i\chi_i}, \quad \psi_i^\dagger \rightarrow \psi_i^\dagger e^{-i\chi_i} \quad (4.17)$$

invariant sein. Das ist allein mit den obigen Operatoren nicht zu erreichen. Danach wären nämlich nur die Produkte $\psi_i^\dagger \psi_i$ von den Phasen unabhängig, mit

denen man nur ganz spezielle physikalische Operatoren aufbauen kann. Erst mittels Eichfeldern läßt sich die allgemeine Phaseninvarianz erreichen.

Einstweilen können wir darauf noch nicht eingehen. Doch sei angemerkt: In der klassischen Physik liefert die Weylsche Eichidee ein Prinzip, welches uns erlaubt, die mit gegebenen kräftefreien Gleichungen verträglichen Felder abzuleiten. Wir können darum sagen, welche der denkbaren Felder (und damit auch der denkbaren Geometrien) vorkommen können. Dadurch werden der Willkür der Spekulationen enge Grenzen gezogen. Doch hat man noch die Freiheit, eichtheoretisch mögliche Felder anzunehmen oder zu verwerfen. Nimmt man jedoch (3.39) ernst, so kommt man quantenphysikalisch ohne Eichfelder nicht aus [19].

Hier berücksichtigen wir die Phaseninvarianz notgedrungen nur teilweise. Wir fordern zunächst, wie es gewöhnlich geschieht, die Phaseninvarianz nur bei gleicher Änderung aller Phasen, nehmen also an, daß die Invarianz bei den Transformationen (3.39) nur für

$$\chi_i \equiv \chi \quad (4.18)$$

zu fordern sei. In diesem Falle ist die Hamilton-Funktion

$$H = (1) + (\psi^\dagger \psi) + (\psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi) + \dots \quad (4.19)$$

Darin ist der erste Term belanglos. Er liefert nur eine Verschiebung des Energienullpunkts. Der zweite beschreibt quantenphysikalische Bewegungsvorgänge. Denn ein Teilchen verschwindet an einer Stelle und wird durch ein gleichartiges an einer anderen ersetzt. Erst vom dritten Term an kommen Wechselwirkungen vor. Speziell beim dritten kommen sie dadurch zustande, daß zwei Teilchen bei ihrer Begegnung vernichtet werden, und daß zur Kompensation zwei gleichartige entstehen. Höhere Terme setzen Mehrteilchenbegegnungen voraus und sind kaum untersucht.

Auch nach Einführung anderer Wechselwirkungen wie z.B. die mit Eichfeldern, bleibt die globale Phaseninvarianz bestehen. Daraus folgt, daß die durch

$$N = \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i \quad (4.20)$$

definierte Teilchenzahl nicht nur hier, sondern ganz universell eine Konstante der Bewegung ist. In der Tat folgt aus

$$[N, \psi_i] = -\psi_i, \quad [N, \psi_i^\dagger] = +\psi_i^\dagger, \quad (4.21)$$

daß homogene Funktionen von der Form (m, n) mit m Faktoren ψ^\dagger und n Faktoren ψ der Gleichung

$$[N, (m, n)] = (m - n) (m, n)$$

genügen. Somit ist

$$[N, H] = 0 \quad \text{und} \quad N = \text{const.} \quad (4.22)$$

Bei globaler Phaseninvarianz ist die Gesamtteilchenzahl konstant.

Danach zerfällt die Welt in Teile, die durch die Gesamtzahl der Teilchen bestimmt ist, und zwischen denen es keine Übergänge gibt. Sei N die Anzahl der Teilchen, so ist die Anzahl der Quantenzustände bei Z Stellen gleich

$$Q(Z, N) = \binom{Z}{N}. \quad (4.23)$$

Die reale Welt kann also nur mit einer der Teilwelten übereinstimmen. Das Vakuum ($N = 0$) und das Plenum ($N = Z$) haben je nur einen Quantenzustand. In diesen beiden Teilwelten gibt es kein Geschehen.

Die Teilwelt maximaler Variabilität stellt sich bei geradem Z für $N = Z/2$ und bei ungeradem Z für $N = (Z \pm 1)/2$ ein. Hier kündigt sich die Diracsee und die Welt über der Diracsee an, die man zwar gern mit passenden Transformationen eliminiert, womit man aber ihre fundamentale Bedeutung verschleiert. In der Diracsee ist jede zweite Stelle besetzt, Z also gerade, und alles Geschehen ist ein Wechsel der Verteilung der $Z/2$ Teilchen auf Z Stellen. Auch darauf können wir hier noch nicht eingehen.

Der endlich dimensionale Zustandsraum ist ein Vektorraum mit Hermiteschem Skalarprodukt $\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle^* = \langle \Phi_2 | \Phi_1 \rangle$, also ein endlich dimensionaler Hilbertraum. Wenn es in jedem Raumpunkt mindestens ein Paar von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gibt, so wird der Zustandsraum unendlich dimensional. Darum liegt es verführerisch nahe anzunehmen, dieser sei mit dem herkömmlich formulierten unendlich dimensionalen Hilbert-Raum äquivalent. Doch unterscheidet sich dieser schon qualitativ vom endlich dimensionalen. Denn in der manifest unendlich dimensionalen Theorie gibt es z.B. inäquivalente Darstellungen, im Endlichdimensionalen aber nicht. Bedenkt man, daß man in der Physik stets nur über endlich viele Informationen verfügt, so muß man schließen, daß man nur solche Unendlichkeiten zulassen darf, die man

vom Endlichdimensionalen her erreichen kann. Wie das möglich ist, wollen wir in § 5 zeigen, in dem wir den Bewegungsanteil des Hamilton-Operators untersuchen.

§ 5. Quantenphysikalische Bewegungen

Quantenphysikalische Bewegungen werden durch Operatoren beschrieben, die in ψ^\dagger, ψ bilinear sind. Sei nunmehr Z die Zahl der Punkte im Raum, so hat man Z Paare von Operatoren, wenn es in jedem Punkt nur ein Operatorpaar gibt. Das soll hier angenommen werden. In der Dirac-Gleichung werden es vier sein.

Bei endlich vielen Punkten ist der Zustandsraum ein endlich dimensionaler Hilbert-Raum. Bei einem Kontinuum von Punkten ist der Zustandsraum unendlich dimensional. Wendet man darauf die Theorie des manifest unendlich dimensionalen Hilbert-Raums an, so führt das zu Resultaten, von denen man sich schwer vorstellen kann, daß sie physikalisch relevant sind.

Darum hat man schon öfters Betrachtungen in hinreichend großen und zugleich hinreichend feinen Gittern durchgeführt, wobei jedoch Dreh- und Lorentz-Invarianz leiden. Gewiß ist zu erwarten, daß die Fehler mit wachsender Größe und Feinheit des Gitters klein werden. Doch könnte es gerade im Bereich der berüchtigten Singularitäten der Feldtheorien Probleme geben, die man mit einem einzigen Gitter nicht erfaßt. Wahrscheinlich wäre die noch unvollendete konstruktivistische Non-Standardanalysis das angemessene Instrument [20].

Darum verwenden wir ebenfalls die Gitterraumtheorie. In Anlehnung an die Basisideen jener Analysis betrachten wir aber eine Folge von Gittern, die von einem Parameter abhängen, mit dem sie zugleich unendlich groß und unendlich klein werden.

Sei Ω eine hinreichend große und am Ende über alle Grenzen wachsende ganze Zahl und h eine innerhalb weiter Grenzen beliebige ganze Zahl, so gehen wir von den rationalen Zahlen

$$\xi = \frac{h}{\Omega!}, \quad -\Omega!^2 \leq h \leq +\Omega!^2 \quad (5.1)$$

aus. Es sind alle rationalen Zahlen ξ , die im Abstand $\epsilon = 1/\Omega!$ aufeinander folgen und im Intervall $-1/\epsilon \leq \xi \leq +1/\epsilon$ liegen. In folgendem Sinne erfassen wir damit alle rationalen Zahlen. Sei $\xi = m/n$

eine beliebige rationale Zahl, so wird sie durch die ganze Zahl $h = m \Omega!/n$ dargestellt, vorausgesetzt, daß $\Omega > n$ ist.

Integrale werden in Anlehnung an die Eulersche Summenformel durch

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \frac{1}{\delta} \sum_{\xi=a}^b f(\xi), \quad \delta = \sum_{\xi=0}^1 1 \quad (5.2)$$

definiert, worin δ die Punktdichte im Zahlengitter ist. Wohlverstanden, (5.2) soll Definition sein. Die Integrale sind darum nur als Gittersummen definiert und hängen noch von Ω ab. Im Konvergenzfall stimmen sie mit gewöhnlichen Integralen überein, bleiben aber noch sinnvoll, wenn ihr Wert mit Ω über alle Grenzen wächst. Man kann auf diese Weise auch mit divergierenden Integralen rechnen, so daß divergente Zwischenergebnisse nicht ausgeschlossen zu werden brauchen, auch wenn man am Ende Konvergenz erwartet. Denn in Rechnungen kommen stets nur endliche Zahlen vor.

Sei $\delta_{\xi, \xi'}$ das Kronecker-Symbol, so verhält sich

$$\delta(\xi - \xi') = \delta \cdot \delta_{\xi, \xi'} \quad (5.3)$$

wie die Diracsche δ -Funktion. Denn nach obiger Definition ist

$$\int_{-1/\epsilon}^{+1/\epsilon} \delta(\xi) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\delta} \sum_{\xi=0}^1 \delta \delta_{\xi, 0} f(\xi) = f(0). \quad (5.4)$$

Noch einmal zeigt sich, daß die Definition der Integrale durch (5.2) über den Geltungsbereich der Eulerschen Summe hinausgeht.

Dasselbe gilt für Ableitungen der δ -Funktion, wenn wir diese durch

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \frac{f(\xi + \epsilon) - f(\xi)}{\epsilon} \text{ bzw. } = \frac{f(\xi) - f(\xi - \epsilon)}{\epsilon} \quad (5.5)$$

definieren. Denn dann ist

$$\begin{aligned} \int_{-1/\epsilon}^{+1/\epsilon} \delta'(\xi) f(\xi) d\xi &= \frac{1}{\epsilon \delta} \sum_{\xi=-1/\epsilon}^{+1/\epsilon} \delta(\delta_{\xi, -\epsilon} - \delta_{\xi, 0}) f(\xi) \\ &= \frac{f(-\epsilon) - f(0)}{\epsilon}, \end{aligned}$$

woraus

$$\int \delta'(\xi) f(\xi) d\xi = -f'(0) \quad (5.6)$$

hervorgeht. Definition (5.5) ist sogar anwendbar, wenn man zwischen Rechts- und Linkableitung unterscheiden muß, und auch, wenn die Quotienten

divergieren. Es ist nur zu fordern, daß höhere Potenzen von ε selbst im Divergenzfall Beiträge liefern, die relativ zum ersten unendlich klein werden.

Offensichtlich ist hier unter Gleichheit eine Gleichheit bis auf relativ unendlich kleine Beiträge zu verstehen. Darin zeigt sich der non-standardanalytische Charakter der Theorie. Sie ist außerdem konstruktivistisch, weil nur rationale Zahlen im Spiel sind. Auf dieser Basis unterscheidet sich der unendlich dimensionale Hilbert-Raum nicht vom endlich dimensionalen weil alle Rechnungen im Endlichdimensionalen durchgeführt werden, und weil erst bei den Ergebnissen nach der Konvergenz gefragt wird.

Damit definieren wir Ortsvektoren. Sei l eine endliche Basislänge, so lauten die Ortsvektoren

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = l(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = l\boldsymbol{\xi}. \quad (5.7)$$

Bei einem einzigen Paar von Elementarprozessen pro Punkt haben wir die Operatorpaare $\psi^\dagger(\mathbf{r})$ und $\psi(\mathbf{r})$, welche den alten Vertauschungsrelationen genügen. Speziell die inhomogenen lauten

$$\{\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} . \quad (5.8)$$

Der Teilchenzahloperator ist nach (5.2) gleich

$$N = \sum_{\mathbf{r}} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \delta \int d\tau \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad d\tau = d^3\mathbf{r}.$$

Darin ist $\delta d\tau$ die Anzahl der Gitterpunkte im Volumenelement $d\tau$ und δ ist die Punktdichte, die Anzahl der Punkte pro Kubikmeter (Dimension $[\delta] = \text{m}^{-3}$).

Im Kontinuum ist es üblich, auf die Dichte bezogene Operatoren einzuführen. Das geschieht mittels

$$\psi \rightarrow \sqrt{\delta} \psi, \quad \psi^\dagger \rightarrow \sqrt{\delta} \psi^\dagger. \quad (5.9)$$

Danach ist

$$N = \int d\tau \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad (5.10)$$

und $\psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$ liefert den Operator der Teilchenzahldichte. Danach nehmen die inhomogenen Vertauschungsrelationen folgende Form an

$$\{\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta \cdot \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.11)$$

und $\delta(\mathbf{r})$ entspricht der δ -Funktion im (5.3), ist nun aber nicht auf die Zahlendichte, sondern auf die Punktdichte im Raum bezogen. Sie hat die Dimension m^{-3} . Analog wie oben gelten die Gleichungen

$$\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) d\tau = f(0), \quad \int f(\mathbf{r}) \nabla \delta(\mathbf{r}) d\tau = -(\nabla f(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}=0}.$$

Damit ist es möglich, Bewegungen im Kontinuum zu beschreiben. Die Bilinearformen lauten nunmehr

$$H = \int d\tau_{12} \psi^\dagger(\mathbf{r}_1) B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_2), \\ d\tau_{12} = d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2. \quad (5.12)$$

Sie besagen: Wenn ein Teilchen im Punkt \mathbf{r}_2 vergeht, entsteht zur Kompensation ein gleichartiges in \mathbf{r}_1 . Es handelt sich also noch nicht um stetige Bewegungen, sondern um quantenphysikalisch mögliche Sprünge. Die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Sprünge ergibt sich aus der Größe von $B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$.

Einfachheitshalber betrachten wir ein eindimensionales Beispiel mit x an Stelle von \mathbf{r} . Bei Translationsinvarianz muß $B(x_1 + a, x_2 + a) = B(x_1, x_2) = B(x_1 - x_2)$ sein. Danach lautet der Hamilton-Operator in (5.12)

$$H = \int \psi^\dagger(x) B(a) \psi(x + a) dx da.$$

Für den Hermitesch konjugierten Operator erhält man

$$H^\dagger = \int \psi^\dagger(x + a) B^\dagger(a) \psi(x) dx da \\ = \int \psi^\dagger(x) B^\dagger(a) \psi(x - a) dx da \\ = \int \psi^\dagger(x) B(-a) \psi(x + a) dx da.$$

Somit besteht Hermitezität, wenn

$$B^\dagger(-a) = B(a)$$

ist. Im Gitter ist, anders als im Kontinuum, nächste Nachbarschaft definiert. Bei Beschränkung auf Wechselwirkungen zwischen nächsten Nachbarn erhält man beispielsweise

$$H = -\frac{1}{\varepsilon^2} C \int \psi^\dagger(x) \\ \cdot (\psi(x + \varepsilon) - 2\psi(x) + \psi(x - \varepsilon)) dx,$$

worin $\varepsilon = 1/\Omega!$ die Gitterkonstante ist, die mit zunehmendem Ω unendlich klein wird. Zustandsvektoren für ein Teilchen

$$|\Phi\rangle = \int dx \psi^\dagger(x) \Phi(x, t) |0\rangle$$

führen zur Schrödinger-Gleichung

$$i\dot{\Phi}(x, t)$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2} C (\Phi(x + \varepsilon, t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x - \varepsilon, t)).$$

woraus offensichtlich die gewöhnliche Schrödinger-Gleichung für einzelne freie Teilchen

$$i \Phi(x, t) = -C \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2}$$

hervorgeht. Darin ist in herkömmlichen Einheiten $C = \hbar^2/2m$.

Ganz ähnlich erhält man im dreidimensionalen Raum (nun ohne Berufung auf die Homogenität)

$$H = \int dt \psi^\dagger(\mathbf{r}) \mathcal{H}(\mathbf{r}, -i\nabla) \psi(\mathbf{r}). \quad (5.14)$$

Der Faktor $-i$ vor ∇ ist aus Hermitezitätsgründen bequem. Für ein einzelnes Teilchen lautet die Schrödinger-Gleichung

$$i \dot{\Phi}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{r}, -i\nabla) \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (5.15)$$

In bekannter Weise ergibt sich daraus die klassisch physikalische Hamilton-Funktion als Näherung. Sei nämlich $u(\mathbf{r}, t)$ in

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}, t) e^{iS(\mathbf{r}, t)}, \quad (5.16)$$

verglichen mit e^{iS} , eine langsam veränderliche Funktion, so gilt näherungsweise

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi &\approx i \Phi \partial_t S, \quad \partial_t \Phi = i \Phi \partial_t S, \\ \partial_{ik} \Phi &= -\Phi \partial_i S \partial_k S \text{ usw.}, \end{aligned}$$

womit die vorige Gleichung in eine Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung übergeht, nämlich in

$$\partial_t S + \mathcal{H}(\mathbf{r}, \partial S / \partial \mathbf{r}) = 0. \quad (5.17)$$

Somit lautet die zugehörige klassisch physikalische Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (5.18)$$

Umgekehrt kann man in Anlehnung an das Quantisierungsverfahren unter günstigen Umständen von der Hamilton-Funktion zur Schrödinger-Gleichung gelangen. Geht man z. B. von

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r})$$

aus, so lautet die zugehörige Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla S^2 + V = 0.$$

Darin hat S die Dimension einer Wirkung, während S in (5.16) dimensionslos ist. Man muß also mittels $S \rightarrow \hbar S$ eine Wirkungskonstante einführen, was zu

$$\hbar \partial_t S + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla S^2 + V = 0$$

führt, und zu der Schrödinger-Gleichung

$$i \hbar \partial_t \Phi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (5.19)$$

für ein Teilchen, das sich in einem Potentialfeld bewegt.

Damit ist gezeigt, wie sich die Grundgleichungen der Quantenmechanik aus dem Konzept des Zusammenspiels von Elementarprozessen ergeben. Das möge zur Rechtfertigung des neuen Konzepts genügen.

Doch braucht man nicht bei der Frage stehen zu bleiben, wie man von bekannten klassischen Gleichungen zur Schrödinger-Gleichung kommt. Man wird nach Prinzipien suchen, welche nicht nur zur Dirac-Gleichung für kräftefreie Bewegungen führen, sondern auch zur Antwort auf die Frage, welche Felder mit der Dirac-Gleichung verträglich sind. Hier sei abermals auf Weyls Eichkonzept hingewiesen, das schon klassisch physikalisch Garant für die Einheit der Physik ist [21].

Angesichts der offenen Fragen, die mit der Forderung der allgemeinen Phaseninvarianz zusammenhängen, kann man nicht sagen, daß das Thema schon abgeschlossen sei. Doch scheint mir sicher gestellt zu sein, daß die Frage nach dem Sein und Nichtsein von Teilchen den Schlüssel zu einer Formulierung der Quantenphysik liefert, die mit der Erschließung der klassischen Physik mittels der Gen-Identität vergleichbar ist. Ohne einen Rückgriff auf die bewundernswerten wissenschaftstheoretischen Prinzipien von Newton wäre es kaum möglich gewesen, dieses Ziel zu erreichen.

Herrn Wahl danke ich für viele Jahre währende, unermüdliche, kritische und stets hilfreiche Unterstützung bei der Entwicklung des obigen Konzepts.

- [1] G. Hamel, Theoretische Mechanik, Springer-Verlag, Berlin 1949, S. 10.
- [2] F. u. I. Joliot, Structure et propriétés des noyaux atomiques. Institut international de physique Solvay, septième conseil de physique, 1933, Gauthier-Villars, Paris 1934, S. 147/148. Innerhalb von 14 Tagen ist die Entdeckung der Paarerzeugung von drei unabhängigen Gruppen bekanntgegeben worden.
- [3] W. Heisenberg, Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie, Hirzel-Verlag, Leipzig 1930; s. IV § 3.
- [4] F. Cajori, Sir Isaac Newton's mathematical principles of natural philosophy, Univ. of Calif. Press, Berkeley 1962, S. 546/547.
- [5] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia, Mathematica, MH Mathematik Physik **38**, 173 (1931).
- [6] Platon, Politeia, Buch VII. Höhlengleichnis.
- [7] W. Capelle, Die Vorsokratiker, Kröner-Verlag, Stuttgart 1953; HERAKLIT, S. 129ff, Ziff. 16 und 33.
- [8] G. W. Leibniz, Natura non facit saltus, Nouveaux Essais IV, 16.
- [9] J. L. Doob, Stochastic Processes, J. Wiley, New York 1953.
- [10] J. W. Gibbs, Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik, übersetzt von E. Zermolo, J. A. Barth, Leipzig 1905.
- [11] Bedenkt man, daß es sich um Gibbssche Gesamtheiten handelt, so wird ein viel diskutiertes Problem gegenstandslos. Ein Beispiel genüge für viele: Ob ein Lichtquant von einer halbdurchlässigen Platte reflektiert oder durchgelassen wird, entscheidet sich an der reflektierenden Fläche und nicht erst bei der Beobachtung des Quants vor oder hinter der Fläche. Der sogenannte Kollaps des Wellenpakets ist kein realer Effekt. Die im Wellenpaket steckende Information wird nach der Beobachtung des Quants bedeutungslos ebenso wie die Gleichwahrscheinlichkeit der Augenzahlen eines Würfels, wenn etwa die Sechs gefallen ist. Teilchen sind Teilchen und Wellen Ausdruck des stochastischen Gesetzes.
- [12] Man untersucht heute z.B. die Frage, ob Protonen wirklich stabil sind oder mit einer Halbwertszeit zerfallen, die größtenordnungsmäßig weit über dem Weltalter liegt. Von solchen Möglichkeiten sehen wir ab.
- [13] I.c. 7, Parmenides, S. 165, Fragment 6; Demokrit, S. 402, Ziff. 13.
- [14] H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel-Verlag, Leipzig 1928, S. 108 u. 144.
- [15] In der Interpretationsliteratur spielt die Nichtsuperponierbarkeit der Wahrscheinlichkeiten der Schrödinger-Theorie eine übergroße Rolle. Reine Gesamtheiten aller statistischen Theorien sind nach Definition nicht superponierbar. Das hätte man seit v. Neumanns Arbeiten schon in ihrer älteren Fassung (M. Born, P. Jordan: Elementare Quantenmechanik, Springer-Verlag, Berlin 1930, § 59) klar sehen können. Die v. Neumannsche Gleichung ist innerhalb einer rein statistischen Quantenphysik die eigentlich fundamentale.
- [16] Nach Dirac heißen alle quantenphysikalischen Gleichungen vom Typ (3.14) Schrödinger-Gleichungen, obwohl Schrödinger davon nichts wissen wollte.
- [17] Man beachte den Vorzeichenunterschied in dieser Gleichung und in (3.4). Die Größe G bezieht sich auf das Objekt, die Zustandsmatrix P auf die Gesamtheit.
- [18] P. Jordan und E. Wigner, Z. Physik **47**, 631 (1928).
- [19] Obwohl mit dem Eichkonzept seit meiner Begegnung mit Weyl (1931/32) vertraut, habe ich Spinorfelder für mehr fundamental gehalten, weil man alle Darstellungen der Lorentzgruppe mit der zweidimensionalen der SU 2 erfassen kann (vgl. F. Bopp: Endliche Massen bei lokaler 2-Fermionenwechselwirkung, Nova acta Leopoldina, NF 55, Nr. 248, 47–92 (1982)). Die Notwendigkeit, Theorien phaseninvariant zu formulieren, erlaubt nicht mehr, bei reinen Spinorfeldtheorien stehen zu bleiben, zumal die Bedeutung der Eichidee für die Einheit der Physik ihren mehr fundamentalen Charakter erkennen läßt.
- [20] C. Schnmieden und D. Laugwitz, Math. Z. **61**, 1 (1958); D. Laugwitz, J. Reine, angew. Math. **207**, 53, **208**, 22 (1961); D. Laugwitz, The theory of infinitesimals, an introduction to non-standard analysis, Accad. Nazion. No. 52 (1980). – Z. Naturforsch. (im Druck).
- [21] F. Bopp, Rationale Analysis (Skriptum). Es wird gezeigt, wie man sämtliche Regeln der Analysis wiederfindet, wenn man mit Folgen von Gittern rationaler Zahlen rechnet.
- [22] Nachtrag bei der Korrektur: Manche meinen, das sei nicht schlüssig. Man könne vielleicht auf höherer Ebene der Metamatik zu anderen Ergebnissen gelangen. Bei Axiomen Newtonscher Art ist das entbehrlich. Sie genügen zur Begründung; mehr wäre willkürliche Zutat.